

Filtragem de Imagens

Prof. Sérgio S Furuie

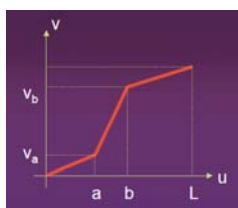
EPUSP/PTC-LEB S.Furuie - 1

Filtros

- Operadores pontuais (baseado apenas na intensidade)
 - Alteração de contraste
 - Equalização do histograma
- Operadores que consideram a vizinhança
 - Filtros globais
 - Filtros lineares
 - Convolução
 - Baseado em resposta em frequência
 - Filtros não lineares: mediana, ad-hocs,
 - Filtros adaptativos

EPUSP/PTC-LEB S.Furuie - 2

Alteração de contraste



$$v = \begin{cases} \alpha u & 0 \leq u < a \\ v_a + \beta(u-a) & a \leq u < b \\ v_b + \gamma(u-b) & b \leq u < L \end{cases}$$

EPUSP/PTC-LEB S.Furuie - 3

Equalização de histograma

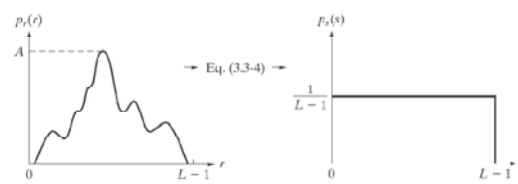


FIGURE 3.18 (a) An arbitrary PDF. (b) Result of applying the transformation in Eq. (3.3-4) to all intensity levels r . The resulting intensities s , have a uniform PDF, independently of the form of the PDF of the r 's.

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{M \cdot N}$$

$$s_k = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j)$$

$$k = 0, 1, \dots, L-1$$

Exemplo: ImageJ Enhance Contrast (equalization). Use: fibroblast...jpg

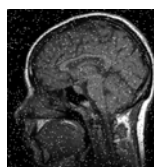
EPUSP/PTC-LEB S.Furuie - 4

FILTRO NO DOMÍNIO DO ESPAÇO

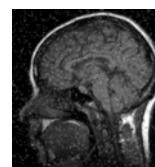
EPUSP/PTC-LEB S.Furuie - 5

Conceito: filtro e convolução

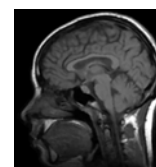
- Filtragem é uma operação feita sobre um sinal ou imagem para obter um outro sinal ou imagem
- Filtro linear e invariante pode ser implementado por convolução
- Convolução pode ser executado rapidamente no domínio da frequência por FFT



Ruído salt pepper



Filtro Média, $r=1$



Filtro Mediana, $r=1$ (Não-linear)

EPUSP/PTC-LEB S.Furuie - 6

Como filtrar sinal?

■ filtros digitais

Séries numéricas:
 $S1 = [0 \ 2 \ 4 \ 4 \ 2 \ 0 \ -2 \ 12 \ 45 \ 166 \ 50 \ 33 \ -2 \ 0 \ \dots]^T$
 Filtragem da média entre os vizinhos $[1 \ 1 \ 1]/3$:
 $S2 = [0 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 0 \ 3 \ 18 \ \dots]^T$

$$\frac{-2.1 + 12.1 + 45.1}{3} = 18.3$$

$$g(i) = \sum_{k=-N_w/2}^{N_w/2} w_k \cdot f(i-k)$$

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 7

Filtros lineares invariantes: convolução

O Sistema é linear se e somente se:

$$cy_1 + y_2 = \mathfrak{I}[cx_1 + x_2]$$

O Sistema é linear e invariante quanto ao deslocamento se:

$$y(n - n_0) = \mathfrak{I}[x(n - n_0)]$$

Filtragem de Imagens

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 8

Convolução 1D: Lin Inv discreto

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]$
 $\delta[n - k] \rightarrow h_k[n]$
 Linearidade $\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_k[n]$
 Invariante $\Rightarrow h_k[n] = h[n - k]$
 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n - k]$
 $y[n] = x[n] * h[n]$

Na prática, devido a finito e zeros $\Rightarrow$

$$y[n] = \sum_{k=k_1}^{k_2} h[k] \cdot x[n - k]$$

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 9

Convolução, Transf. de Fourier: 1D

- Formalmente e no caso contínuo: convolução
- Convolução: comutativo, associativo, distributivo
- Convolução $\Rightarrow$ multiplicação no domínio da frequência

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi f t} d\tau dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t') \cdot e^{-j2\pi f (t+\tau)} d\tau dt'$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 10

Filtragem de imagens

■ Aplicando uma média (janela móvel de pesos)

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 95 & 80 & 80 & 80 \\ 95 & 90 & 90 & 105 \\ 150 & 20 & 100 & 130 \\ 220 & 150 & 160 & 150 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 89 & \\ & & & \end{bmatrix}$$

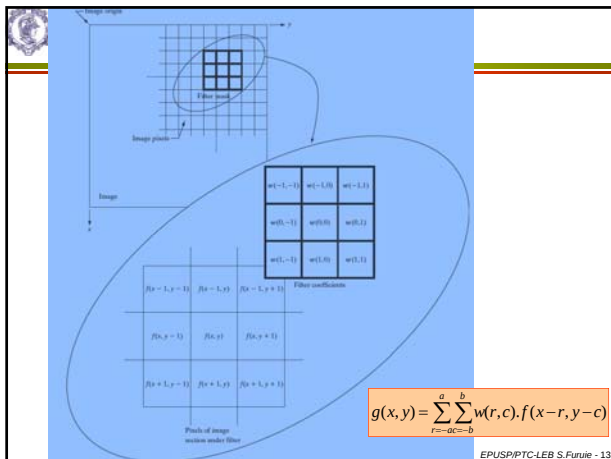
EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 11

Convolução 2D

$$g(x, y) = \sum_{r=-a}^a \sum_{c=-b}^b w(r, c) \cdot f(x-r, y-c)$$

$$\begin{bmatrix} 95 & 80 & 80 & 80 \\ 95 & 90 & 90 & 105 \\ 150 & 20 & 100 & 130 \\ 220 & 150 & 160 & 150 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & -75 & \\ & & & \end{bmatrix}$$

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 12



Implementação em pseudo-código

$$g(x,y) = \sum_{r=-a}^a \sum_{c=-b}^b w(r,c).f(x-r,y-c)$$

Entradas:
 f[R linhas][C colunas]; w[A linhas][B colunas] (A e B: ímpares)
 Desconsidere as bordas

Algoritmo:

- Sejam: a=A/2; b=B/2
- for (x=a; x < (R-a); x++)
 for (y=b; y < (C-b); y++)
 g[x][y]=0;
 for (r=-a; r <= a; r++)
 for (c=-b; c <= b; c++)
 g[x][y]=g[x][y] + w[r+a][c+b] * f[x-r][y-c]
 end for
 end for
- end for

EPUSP/PTC-LEB S.Furui - 14

Implementação em java

$$g(x,y) = \sum_{r=-a}^a \sum_{c=-b}^b w(r,c).f(x-r,y-c)$$

Entradas:
 f[R linhas][C colunas]; w[A linhas][B colunas] (A e B: ímpares)
 Desconsidere as bordas

Algoritmo:

```

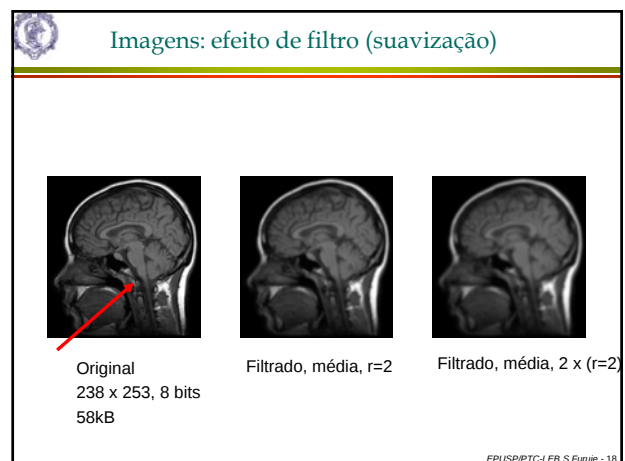
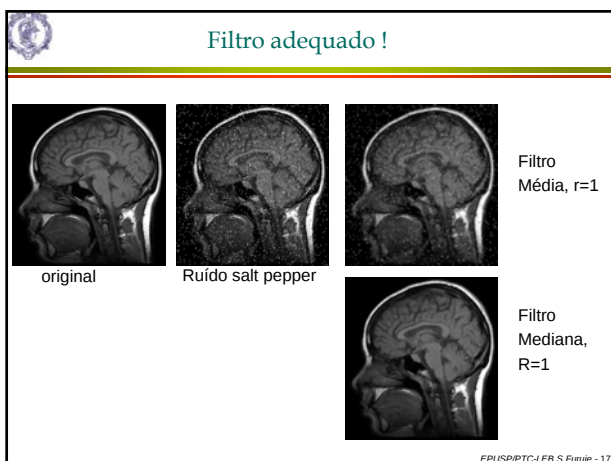
1. int a=A/2; int b=B/2
2. for (int x=a; x < (R-a); x++)
  for (int y=b; y < (C-b); y++)
    {g[x][y]=0;
     for (int r=-a; r <= a; r++)
       for (int c=-b; c <= b; c++)
         g[x][y]=g[x][y] + w[r+a][c+b] * f[x-r][y-c];
    }
  
```

EPUSP/PTC-LEB S.Furui - 15

Exemplo no ImageJ: filtro

- Vamos implementar um plugin no ImageJ que:
 - Filtre os ruídos substituindo pela média dos 8-vizinhos (média entre 9 pixels) (ver plugin [media_sf.java](#))
 - Filtre os ruídos substituindo pela mediana
- Como tratar as bordas?
 - Veja a classe ImageAccess.java
 - Ou tratar usando um modelo:
 - Supondo valores zero fora da imagem
 - Valores espelhados p/ pixels fora da imagem (ImageAccess)
 - Tratar a exceção considerando apenas os pixels da imagem. Necessário considerar os sub-kernels adaptando os valores dos pesos, pois a normalização fica diferente

EPUSP/PTC-LEB S.Furui - 16



Formalizando convolução: 2D, contínuo

Definição para funções contínuas:
 $g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$
 $g(x, y) \triangleq \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot h(x - x', y - y') dx' dy'$

Pode-se provar:
 $g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f(x - x', y - y') dx' dy'$
 $G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$

Na qual G, H e F são as transformadas de Fourier 2D de g, h e f respectivamente.

Como fariamos a convolução se h e f fossem 1000 x 1000 cada ?

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 19

FILTROS LINEARES INVARIANTES
NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 20

Filtragem de Imagens no domínio da frequência

- Conceito de frequência espacial e espectro em frequência
 - frequência espacial
 - Transformada de Fourier
 - FFT

Filtragem de Imagens

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 21

Frequência espacial

É uma medida de periodicidade de um conjunto de dados bi-dimensional com respeito à medida de distância

Baixa Frequência Espacial Alta Frequência Espacial

1 mm $\Rightarrow$ 1 ciclo/mm 1 mm $\Rightarrow$ 2 ciclos/mm

Filtragem de Imagens

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 22

Conteúdo em frequência

FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 23

Transformadas de Fourier bi-dimensional contínua:

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

Direta: $F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(u \cdot x + v \cdot y)} \cdot dx dy$

Inversa: $f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \cdot e^{j2\pi(u \cdot x + v \cdot y)} \cdot du dv$

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 24

Transformadas de Fourier bi-dimensional discreta:

$f(x, y), \quad x = 0 \dots M-1; \quad y = 0 \dots N-1 \Rightarrow f[M][N]$
 $F(u, v), \quad u = 0 \dots M-1; \quad v = 0 \dots N-1 \Rightarrow F[M][N]$

Direta:
$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(u\frac{x}{M} + v\frac{y}{N})}$$

$$u = 0, \dots, M-1; \quad v = 0, \dots, N-1$$

Inversa:
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(u\frac{x}{M} + v\frac{y}{N})}$$

$$x = 0, \dots, M-1; \quad y = 0, \dots, N-1$$

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 25

Transformada de Fourier de imagem

FIGURE 4.25 (a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum. (c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

Note a periodicidade em cada direção

Ref.: Gonzalez, 2008 EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 28

Exemplo de FFT no ImageJ

- FFT => parte real, parte imaginária, módulo, espectro
- Notação: circular
- Notação: centrada

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 29

Como aplicar?

Propriedade fundamental:

- $G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$

Filtragem de Imagens

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 30

Filtros no domínio da frequência

Filtro passa-baixa

- Butterworth de ordem n

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{u^2 + v^2}{D_0^2} \right]^n}$$

D_0 : frequência de corte

FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Ref.: Gonzalez, 2008 EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 31

Exemplo de filtragem Butterworth, passa-baixa

FIGURE 4.45 (a) Original image. (b) Results of filtering using 10, 30, 60, 100, and 400 Butterworth filters. The filters are applied to the image, resulting in different levels of blurring.

Ref.: Gonzalez, 2008 EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 32

Exemplo de filtragem (FFT) no ImageJ

Para filtrar f no domínio da frequência basta:

- 1) Realizar zero-padding se necessário
- 2) Obter $F(u,v)=FFT(f)$
- 3) Obter $H(u,v)$
- 4) $G=H.F$
- 5) Obter a inversa de G
 $g(x,y)=IFFT(G)$

Processo similar para filtros passa-alta, passa-banda, rejeita-banda, ...

EPUSP/PTC-LEB S. Furuiê - 33

Restauração no domínio da frequência: filtro de Wiener (MMS-Minimum Mean square error)

Filtro Inverso

$$G(u,v) = H(u,v) \cdot F(u,v) + N(u,v)$$

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \frac{S_n(u,v)}{S_f(u,v)}} \right] G(u,v)$$

$$S_n(u,v) = |N(u,v)|^2 \text{ (espectro de potência do ruído)}$$

$$S_f(u,v) = |F(u,v)|^2 \text{ (estimado de } f \text{)}$$

EPUSP/PTC-LEB S. Furuiê - 34

FILTROS NÃO-LINEARES E LOCAIS

EPUSP/PTC-LEB S. Furuiê - 35

Filtros não-lineares: mediana

$$g(n,m) = \text{mediana}\{f(m-k, n-l), (k,l) \in W\}$$

Filtragem de Imagens

EPUSP/PTC-LEB S. Furuiê - 36

Filtros adaptativos

Wiener adaptativo (Lee)

- Preserva bordas
- Atenua ruído de regiões homogêneas

$$g(x,y) = (1-\alpha) \cdot \bar{f}(x,y) + \alpha \cdot \tilde{f}(x,y)$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{ruído}}^2}{\sigma_{\text{local}}^2}$$

se borda $\Rightarrow \sigma_{\text{local}}^2$ elevado $\Rightarrow \alpha \approx 0 \Rightarrow g(x,y) = \tilde{f}(x,y)$
 se homogêneo $\Rightarrow \alpha \approx 1 \Rightarrow g(x,y) = \bar{f}(x,y)$

Filtragem de Imagens

EPUSP/PTC-LEB S. Furuiê - 37

Filtro adaptativo por difusão

Difusão (ex. no ImageJ)

- Isotrópica, linear (difusão térmica)
- Anisotrópica não-linear (Perona & Malik)
- Anisotrópica direcional

EPUSP/PTC-LEB S. Furuiê - 38

Filtro por difusão anisotrópica

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \text{div}[c(|\nabla I|) \cdot \nabla I]$$

$$c(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{K}\right)^2}$$

Na qual K é uma referência para o valor do módulo de gradiente. Vamos detalhar uma implementação numérica por diferenças finitas de cada parte da equação 17:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{I(x,y,t+\Delta t) - I(x,y,t)}{\Delta t}$$

$$\nabla I(x,y,t) = \frac{\partial I}{\partial x} \cdot \vec{u}_x + \frac{\partial I}{\partial y} \cdot \vec{u}_y$$

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial x} = \frac{I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t)}{2}$$

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial y} = \frac{I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t)}{2}$$

na qual $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ são os vetores unitários dos eixos x e y respectivamente.

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 39

$$|\nabla I(x,y,t)| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t))^2 + (I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t))^2}$$

$$c_d(x,y,t) = c(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla I|}{K}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left[\frac{(I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t))^2 + (I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t))^2}{(2K)^2}\right]}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}[c(|\nabla I|) \cdot \nabla I] =$$

$$= \text{div}[a(x,y,t) \cdot \vec{u}_x + b(x,y,t) \cdot \vec{u}_y] = \frac{\partial a(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial b(x,y,t)}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{2} [a(x+1,y,t) - a(x-1,y,t) + b(x,y+1,t) - b(x,y-1,t)]$$

Na qual,

$$a(x,y,t) = c_d(x,y,t) \cdot \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial x} = c_d(x,y,t) \cdot \frac{1}{2} [I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t)], \text{ donde:}$$

$$a(x+1,y,t) = \frac{1}{2} c_d(x+1,y,t) \cdot [I(x+2,y,t) - I(x,y,t)]$$

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 40

$$a(x-1,y,t) = \frac{1}{2} c_d(x-1,y,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x-2,y,t)]$$

$$b(x,y,t) = c_d(x,y,t) \cdot \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial y} = c_d(x,y,t) \cdot \frac{1}{2} [I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t)]$$

$$b(x,y+1,t) = \frac{1}{2} c_d(x,y+1,t) \cdot [I(x,y+2,t) - I(x,y,t)]$$

$$b(x,y-1,t) = \frac{1}{2} c_d(x,y-1,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x,y-2,t)]$$

Portanto,

$$4 \frac{\partial I}{\partial t} = 4 \frac{I(x,y,t+\Delta t) - I(x,y,t)}{\Delta t}$$

$$= c_d(x+1,y,t) \cdot [I(x+2,y,t) - I(x,y,t)]$$

$$- c_d(x-1,y,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x-2,y,t)]$$

$$+ c_d(x,y+1,t) \cdot [I(x,y+2,t) - I(x,y,t)] - c_d(x,y-1,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x,y-2,t)]$$

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 41

E o algoritmo com relaxação seria:

$$I(x,y,t+1) = I(x,y,t) + \frac{\lambda}{4} \cdot \Delta t \cdot [c_d(x+1,y,t) \cdot [I(x+2,y,t) - I(x,y,t)] + c_d(x-1,y,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x-2,y,t)] + c_d(x,y+1,t) \cdot [I(x,y+2,t) - I(x,y,t)] + c_d(x,y-1,t) \cdot [I(x,y,t) - I(x,y-2,t)]]$$

Na qual:

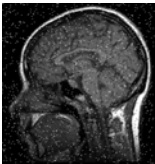
$$c_d(x,y,t) = \frac{1}{1 + \left[\frac{(I(x+1,y,t) - I(x-1,y,t))^2 + (I(x,y+1,t) - I(x,y-1,t))^2}{(2K)^2}\right]}$$

e $I(x,y,0) = I(x,y)$ (imagem inicial)

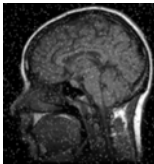
EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 42

Conceito: filtro, convolução e Fourier

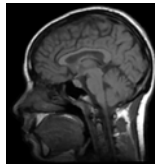
- Filtragem é uma operação feita sobre um sinal ou imagem para obter um outro sinal ou imagem
- Filtro linear e invariante pode ser implementado por convolução
- Convolução pode ser executado rapidamente no domínio da frequência por FFT



Ruído salt pepper



Filtro Média, r=1



Filtro Mediana, r=1

EPUSP/PTC-LEB S.Furue - 43