**Termo-estatística - IFUSP - 2011**
**Primeira Série de Exercícios**

**1-** A baixas temperaturas, o calor específico a pressão constante de uma determinada substância comporta-se de acordo com a expressão

$$c_P = 10R\left(\frac{T}{T_F}\right),$$

onde $T$ é dado em kelvins, $R$ é a constante universal dos gases (para simplificar as contas, use $R = 8,0\ J/K \times mol$), e $T_F = 1000\ K$ é uma constante conhecida como "temperatura de Fermi". Esse material se funde a $500\ K$, com o calor de fusão $L = 5 \times 10^4\ J/mol$. Acima da temperatura de fusão, o calor específico molar é constante,

$$c_P = 3R.$$

(a) Esboce um gráfico do calor específico a pressão constante contra a temperatura. Indique os valores característicos nas duas faixas de temperatura.

(b) A pressão constante, qual a quantidade de calor necessária para que um mol desse material passe de uma temperatura inicial $T_i = 100\ K$, na fase sólida, a uma temperatura final $T_f = 1000\ K$, na fase líquida?

**2-** A energia interna de um sistema gasoso é dada pela expressão

$$U = \frac{5}{2}pV + C,$$

onde $C$ é uma constante. Num diagrama $p - V$ este sistema percorre uma trajetória quase-estática entre um ponto inicial $A$ ($p_A = 0,2\ MPa$; $V_A = 0,01\ m^3$) e um ponto final $B$ ($p_B = 0,2\ MPa$; $V_B = 0,03\ m^3$), dada pela parábola $p = 10^5 + 10^9 \times (V - 0,02)^2$. Qual o trabalho realizado pelo sistema? Qual o calor absorvido pelo sistema? Qual a variação da energia interna?

**3-** A baixas temperaturas, o calor específico molar a pressão constante de uma determinada substância metálica é dado pela expressão

$$c_p = AT + BT^3,$$

onde $A = 10^{-3}\, J/\left(mol \times K^2\right)$, $B = 10^{-5}\, J/\left(mol \times K^4\right)$ e $T$ é a temperatura absoluta.

(a) Numa transformação a pressão constante, qual a quantidade de calor necessária para que 3 **moles** dessa substância passem do zero absoluto a uma temperatura final $T_f = 10\, K$?

(b) Supondo que o processo global seja reversível, qual é a variação da entropia dessa susbtância entre o zero absoluto e a temperatura $T_f = 10\, K$?

**4-** Determinada quantidade de um **gás ideal diatômico** (definido pelas equações de estado $pV = nRT$ e $U = \frac{5}{2}nRT$) é aquecida lentamente, a volume contante, desde o ponto $A$, com volume $V_A = 1m^3$ e pressão $p_A = 0,1\, Pa$, até o ponto $B$, com $V_B = V_A = 1\, m^3$ e $p_B = 12,8\, Pa$. Em seguida o gás se expande **adiabaticamente**, até o ponto $C$, atingindo a mesma pressão do ponto inicial $A$ ($p_C = p_A = 0,1\, Pa$). Finalmente o ciclo é fechado através de um processo termodinâmico isobárico, levando o sistema de $C$ até $A$.

(a) Esboce o diagrama desse ciclo no plano $p - V$.

(b) Mostre que a equação de uma adiabática desse sistema no plano $p-V$ é dada por

$$pV^{\gamma} = C.$$

Qual o valor das contantes $\gamma$ e $C$? Qual o volume $V_C$ no ponto $C$?

(c) Preencha a tabela abaixo, com o trabalho realizado, $\Delta W$, e o calor absorvido pelo sistema, $\Delta Q$, nos vários trechos desse ciclo.

| | $A \to B$ | $B \to C$ | $C \to A$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta W$ | | | |
| $\Delta Q$ | | | |

Os seus resultados devem levar em conta o caráter cíclico do processo e estar de acordo com a primeira lei da termodinâmica (conservação da energia)!

(d) Preencha a tabela abaixo com os balanços energético (variação da energia interna, $\Delta U$) e entrópico (variação da entropia, $\Delta S$) desse sistema, supondo que o processo global seja reversível. Os resultados para a entropia devem ser expressos em termos do número de moles $n$ e da contante dos gases $R$.

| | $A \to B$ | $B \to C$ | $C \to A$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta U$ | | | |
| $\Delta S$ | | | |

(e) Qual o rendimento da máquina térmica representada por esse ciclo?

**5-** Considere um sistema isotrópico em contato com uma fonte de calor e com um dispositivo mecânico (fonte de trabalho). Segundo a primeira lei da termodinâmica,

$$\Delta U = \Delta Q - p\Delta V$$

num processo infinitesimal. Explique o significado de cada um dos termos dessa expressão. Além disso, ainda devemos ter a desigualdade

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S - \frac{1}{T}\Delta Q \geq 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta S \geq \frac{1}{T}\Delta Q.$$

Explique o significado de todos os termos nessas expressões.

Qual a relação dessas expressões com o enunciado famoso de Clausius sobre as leis termodinâmica?

Nota histórica: Na epígrafe do trabalho sobre o equilíbrio das substâncias heterogêneas (Transactions of the Connecticut Academy, 1875), J. W. Gibbs faz uma citação famosa de R. Clausius (Pogg. Ann., 1865): "Die Energie der Welt ist constant. Die entropie der Welt strebt einen Maximum zu."

**6-** A velocidade do som no ar, a uma temperatura de 27 $^{\circ}C$, é de aproximadamente 330 $m/s$. Compare com a velocidade típica de uma molécula de nitrogênio nessas mesmas condições. A constante de Boltzmann é $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\, J/K$.

**7-** Você devem ter aprendido que "um mol de um gás, em condições normais de pressão e de temperatura, ocupa um volume de $22,4$ litros". Qual a relação desse valor com a constante de Boltzmann? E com o número de Avogadro?

**8-** Em uma certa região do espaço exterior há uma média de apenas 5 moléculas por $cm^3$. A temperatura nessa região é de cerca de 3 $K$. Qual é a pressão média desse gás muito rerefeito?

**9-** Qual é a energia interna (em joules) de um mol de argônio a 27 $^{\circ}C$?

**10-** Mostre que

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2};$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.$$

**11-** Qual é a velocidade quadrática média das moléculas de $CO_2$ gasoso a 298 $K$? Compare com a velocidade quadrática média de uma átomo de césio num forno aquecido a 500 $^oC$.

**12-** Qual o caminho livre médio das moléculas de um gás de $CO_2$ a temperatura de 298 $K$ e pressão de 1 $atm$? Qual a frequência das colisões moleculares nesse sistema gasoso?

**13-** Obtenha a condutividade térmica do ar a temperatura ambiente. Nessas mesmas condições, um gás de $CO_2$ seria um isolante térmico melhor do que o ar?

**14-** A teoria cinética prevê que a viscosidade de um gás diluído aumenta com a temperatura. Esse resultado pouco intuitivo foi obtido inicialmente pelo próprio Maxwell, que o considerou "remarkable", e que decidiu fazer experiências para verificá-lo. Mostre que o coeficiente de viscosidade $\eta$ de um gás ideal é proporcional a $\sqrt{T}$ e independente da pressão. Será que conseguiríamos reproduzir as experiências realizadas por Maxwell?

**15-** Suponha que as quatro bases, $A$, $C$, $T$ e $G$, ocorram com a mesma probabilidade numa sequência de DNA com nove monômeros.

(a) Qual a probabilidade de encontrar a sequência $AAATCGAGT$?

(b) Qual a probabilidade de encontra a sequência $CCCCCCCCC$?

(c) Qual a probabilidade de encontrar uma sequência com quatro $A$s, um $C$, dois $T$s e dois $G$s, como a sequência do item (a)?

**16-** Um "gás de red"" é uma sistema de $V$ células em que se distribuem $N$ partículas, tal que cada célula esteja vazia ou ocupada no máximo por uma única partícula. Qual o número de configurações desse sistema com $V = 20$ e $N = 15$? E com $V = 16$ e $N = 15$? E com $V = 15$ e $N = 15$?

**17-** Dada a "distribuição plana",

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & -a \leq x \leq a, \\ 0, & x > |a|, \end{cases}$$

faça um gráfico de $p(x)$ contra $x$ e obtenha

(a) os valores esperados $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$;

(b) o desvio quadrático, $\sigma^2 = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$.

**18-** Considere a distribuição de probabilidades

$$p(x) = \begin{cases} ax^n, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1. \end{cases}$$

(a) Encontre o parâmetro $a$ para que essa distribuição seja normalizada.

(b) Usando essa forma de $a$, faça um gráfico de $p(x)$ contra $x$ e obtenha os valores esperados $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$, e o desvio quadrático, $\sigma^2 = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$.

**19-** A distribuição de Poisson, usada para descrever o decaimento radioativo, é dada por

$$p(n) = \frac{1}{n!} a^n \exp(-a),$$

com $n = 0, 1, 2, ..., N$.

(a) Esboce gráficos de $p(n)$ para $a = 0,5$ e $a = 5,0$.

(b) Verifique a normalização de $p(n)$. Obtenha $\langle n \rangle$ e $\langle n^2 \rangle$. Em que limite essa distribuição tende a uma binomial? Por que? Você conhece outros exemplos de utilização dessa distribuição?

**20-** Obtenha os máximos e mínimos da função

$$V(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 24x.$$

Considerando $V(x)$ como uma função potencial, qual o ponto de equilíbrio estável? Por que? Qual seria a frequência das pequenas oscilações em torno do equilíbrio?