

## Passeio aleatório em uma dimensão

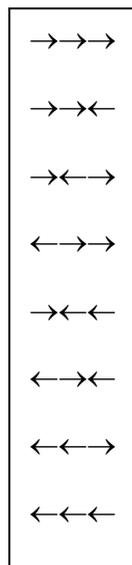
Hipótese: Uma partícula inicialmente em repouso, tem como característica, mover-se para a direita ou para a esquerda (apenas) de forma aleatória e com as seguintes propriedades:

- i. a probabilidade ( $P_e$ ) de a partícula mover-se para a esquerda é exatamente a mesma ( $P_d$ ) de ela mover-se para a direita, se  $k$  é o número de possibilidades para onde a partícula pode se mover, a probabilidade de  $P_e$  ou  $P_d$  é dada por  $\frac{1}{k}$ , no caso unidimensional temos  $P_e = P_d = \frac{1}{2}$ .
- ii. Cada passo dado pela partícula possui mesmo tamanho do passo anterior.
- iii. Após a contagem de  $N$  passos a partícula será encontrada em uma posição ímpar se  $N$  for ímpar e em uma posição par se  $N$  for par, i.e. existem posições finais impossíveis dependendo se  $N$  é par ou ímpar.

### *Contagem de Arranjos Possíveis*

Digamos que tenham sido contados 3 passos ( $N=3$ ) de uma partícula, primeiro contaremos todas as possibilidades possíveis de como esses passos podem se configurar, faremos isso graficamente representando ( $\rightarrow$ ) como passos para a direita e ( $\leftarrow$ ) como passos para a esquerda.

O quadro abaixo apresenta todas as configurações possíveis para  $N=3$ :



Lembramos que cada passo é independente do anterior de forma que a cada passo dado a partícula tem sempre o mesmo número de possibilidades, ou seja, no primeiro passo a partícula tem 2 possibilidades de movimento, no segundo passo a partícula tem novamente 2 possibilidades independentes de para qual lado foi o passo anterior ou seja  $2 \cdot 2 = 2^2$  possibilidades. No terceiro passo a situação se repete em qualquer que seja a posição anterior, portanto  $2^3$  possibilidades.

Assim temos que o número total de configurações possíveis depois de N passos é dado por  $2^N$ .

### *Eliminando Resultados Repetidos*

Se quisermos saber o número de arranjos onde é dado um passo para a direita(n) em N=3 passos podemos contar diretamente do diagrama o que nos fornece n=3. Se N for um número maior a contagem no diagrama se torna impraticável, então para obter o resultado desejado usaremos a expressão de análise combinatória, assim no início do movimento 1 passo para a direita pode ser dado tanto no primeiro, quanto no segundo ou no terceiro passos, existem assim 3 possibilidades. Depois de ser dado o primeiro passo (se ele for para a esquerda) restam 2 possibilidades de localização de nosso passo para a direita, se o segundo passo também for para a esquerda resta apenas 1 possibilidade de localização do passo para a direita. Assim o total de possibilidades de arranjos de 1 passo para a direita é:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

Mas em nosso exemplo estamos considerando que cada passo é indistinguível de um outro passo no mesmo sentido, assim quando usamos 3! estamos contando com a inversão de posição dos passos o que não nos interessa já que cada passo para a direita equivale a qualquer outro, portanto temos que compensar essa contagem extra tanto nos passos para direita quanto nos passos para a esquerda, o que nos dá:

$$\frac{3!}{1!2!} \text{ que de forma genérica é } \frac{N!}{n!(N-n)!} \text{ onde } n = \rightarrow \text{ e } (N-n) = \leftarrow$$

### *Probabilidade de um evento*

Evento é uma configuração específica de interesse. A probabilidade de que um evento ocorra, (por exemplo a probabilidade de ser dado um passo para a direita e outros dois para a esquerda) é a multiplicação do número de possibilidades que atendem à exigência do evento multiplicado pela probabilidade de ocorrência de um único evento, assim a probabilidade de que se dê um passo para a direita e outros dois para a esquerda em N=3 passos é

$$P(n) = \frac{3!}{1!(2)!} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8} \approx 37\%$$

Se compararmos com o quadro de setas, existem 3 configurações onde é dado um passo para a direita e dois para a esquerda, dentre 8 configurações possíveis, assim  $P(n) = \frac{3}{8}$

Generalizando temos:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot p^n q^{N-n}$$

Onde  $p$  é a probabilidade de que seja dado um passo para a direita,  $q$  a probabilidade de que seja dado um passo para a esquerda e  $p+q=1$ .

Esta expressão é chamada de distribuição binomial pois existem apenas 2 resultados possíveis a cada experimento realizado, ou seja, a cada passo.