Passeio aleatório em uma dimensão

Hipótese: Uma partícula inicialmente em repouso, tem como característica, mover-se para a direita ou para a esquerda (apenas) de forma aleatória e com as seguintes propriedade:

i. a probabilidade (Pe) de a partícula mover-se para a esquerda é exatamente a mesma (Pd) de ela mover-se para a direita, se k é o número de possibilidades para onde a partícula pode se mover, a probabilidade de Pe ou Pd é dada por $\frac{1}{k}$, no caso unidimensional temos Pe=Pd=$\frac{1}{2}$.

ii. Cada passo dado pela partícula possue mesmo tamanho do passo anterior.

iii. Após a contagem de N passos a partícula será encontrada em uma posição ímpar se N for ímpar e em uma posição para se N for par, i.e. existem posições finais impossíveis dependendo se N é par ou ímpar.

Contagem de Arranjos Possíveis

Digamos que tenham sido contados 3 passos (N=3) de uma partícula, primeiro contaremos todas as possibilidades possíveis de como esses passos podem se configurar, faremos isso graficamente representando (→) como passos para a direita e (←) como passos para a esquerda.

O quadro abaixo apresenta todas as configurações possíveis para N=3:

→→→
→→←
→←→
←→→
→←←
←→←
←←→
←←←

Lembramos que cada passo é independente do anterior de forma que a cada passo dado a partícula tem sempre o mesmo número de possibilidades, ou seja, no primeiro passo a partícula tem 2 possibilidades de movimento, no segundo passo a partícula tem novamente 2 possibilidades independentes de para qual lado foi o passo anterior ou seja $2.2=2^2$ possibilidades. No terceiro passo a situação se repete em qualquer que seja a posição anterior, portanto 2^3 possibilidades.

Assim temos que o número total de configurações possíveis depois de N passos é dado por 2^N.

Eliminando Resultados Repetidos

Se quisermos saber o número de arranjos onde é dado um passo para a direita(n) em N=3 passos podemos contar diretamente do diagrama o que nos fornece n=3. Se N for um número maior a contagem no diagrama se torna impraticável, então para obter o resultado desejado usaremos a expressão de análise combinatória, assim no início do movimento 1 passo para a direita pode ser dado tanto no primeiro, quanto no segundo ou no terceiro passos, existem assim 3 possibilidades. Depois de ser dado o primeiro passo (se ele for para a esquerda) restam 2 possibilidades de localização de nosso passo para a direita, se o segundo passo também for para a esquerda resta apenas 1 possibilidade de localização do passo para a direita. Assim o total de possibilidades de arranjos de 1 passo para a direita é:

$$3.2.1=3!=6$$

Mas em nosso exemplo estamos considerando que cada passo é indistinguível de um outro passo no mesmo sentido, assim quando usamos 3! estamos contando com a inversão de posição dos passos o que não nos interessa já que cada passo para a direita equivale a qualquer outro, portanto temos que compensar essa contagem extra tanto nos passos para direita quanto nos passos para a esquerda, o que nos dá:

$\frac{3!}{1!2!}$ que de forma genérica é $\frac{N!}{n!(N-n)!}$ onde n=$\rightarrow$ e (N-n)= $\leftarrow$

Probabilidade de um evento

Evento é uma configuração específica de interesse. A probabilidade de que um evento ocorra, (por exemplo a probabilidade de ser dado um passo para a direita e outros dois para a esquerda) é a multiplicação do número de possibilidades que atendem à exigência do evento multiplicado pela probabilidade de ocorrência de um único evento, assim a probabilidade de que se dê um passo para a direita e outros dois para a esquerda em N=3 passos é

$$P(n) = \frac{3!}{1!\,(2)!} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8} \approx 37\%$$

Se compararmos com o quadro de setas, existem 3 configurações onde é dado um passo para a direita e dois para a esquerda, dentre 8 configurações possíveis, assim $P(n) = \frac{3}{8}$

Generalizando temos:

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \cdot p^n q^{N-n}$$

Onde p é a probabilidade de que seja dado um passo para a direita, q a probabilidade de que seja dado um passo para a esquerda e $p+q=1$.

Esta expressão é chamada de distribuição binomial pois existem apenas 2 resultados possíveis a cada experimento realizado, ou seja, a cada passo.