

3

CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

3.1 INTRODUÇÃO

O estudo de circuitos de corrente alternada (C.A.) é sobretudo importante dado que a grande maioria das instalações elétricas utiliza este tipo de circuitos.

Inicia-se o desenvolvimento do estudo dos circuitos em C.A. pela definição de grandezas periódicas senoidais, que são as bases para tais estudos. Define-se, a seguir, a representação fasorial de grandezas senoidais, que facilita sobretudo sua manipulação.

Mostra-se, através de um esquema ilustrativo de um gerador C.A., que a geração de uma f.e.m. senoidal é relativamente simples. Verifica-se que o conceito de potência elétrica em C.A. exige que sejam definidas outras grandezas auxiliares e mostra-se a relação existente entre potência em circuitos C.A. e C.C..

Apresentam-se então os circuitos elementares com excitação senoidal, isto é, um gerador C.A. alimentando uma resistência, uma indutância e uma capacitância, bem como a associação série destes elementos.

Analisa-se então os procedimentos para a resolução de circuitos C.A. a partir da analogia com os métodos de resolução de circuitos C.C., vistos anteriormente. Dá-se destaque para o cálculo da queda de tensão e da potência para os circuitos monofásicos, em circuitos correntemente utilizados em instalações elétricas..

3.2 GRANDEZAS ALTERNADAS SENOIDAIS

3.2.1 Definições

Uma função senoidal, Figura. 3.1, é dada por:

$$y = Y_M \text{ sen}(\omega t + \alpha) \quad (3.1)$$

ou

$$y = Y_M \text{ sen} (2\pi f t + \alpha) = Y_M \text{ sen} \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha \right) \quad (3.2)$$

onde:

- Y_M = valor máximo da grandeza senoidal, medido numa unidade qualquer;
- y = valor da grandeza senoidal no instante t , medido na mesma unidade de que Y_M ;
- T = período da grandeza senoidal, medido em segundos (s);
- $f = 1/T$ = frequência da grandeza senoidal medida em Hertz (Hz);
- t = instante genérico em que se quer determinar a grandeza senoidal expressa em segundos (s);
- α = fase inicial, ou simplesmente, fase da grandeza senoidal expressa em radianos (rad)

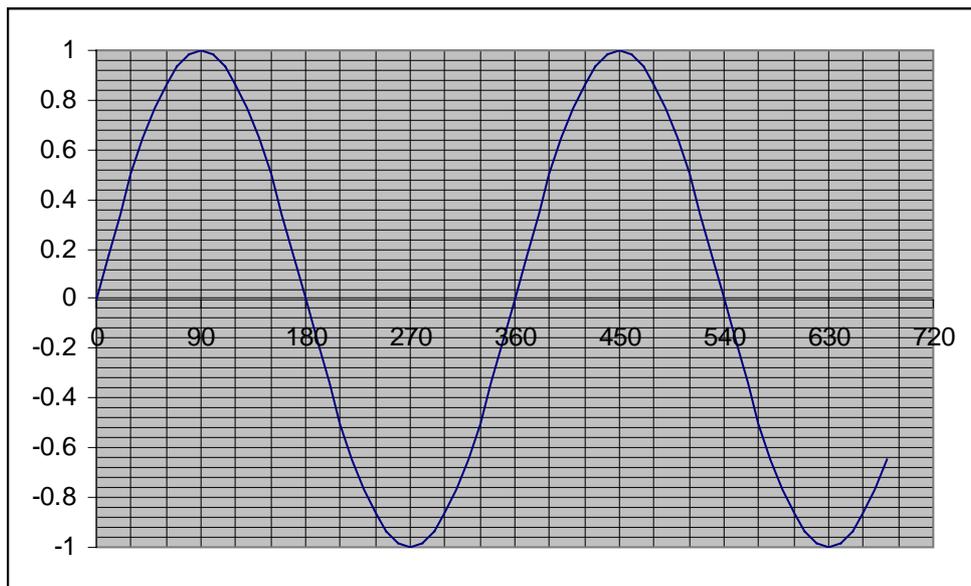


Figura 3.1 – Função senoidal

O termo $2\pi f$, que representa o número de radianos descritos na unidade de tempo, é designado por pulsação angular (rad/s) sendo, usualmente, representado pelo símbolo ω , isto é:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

A função senoidal é periódica e alternada no tempo, pois em intervalos de tempo iguais correspondem valores iguais da função e seu valor médio num período, Y_m , é nulo, ou seja:

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y dt = 0 \quad (3.3)$$

Dada uma segunda grandeza senoidal:

$$y' = Y'_M \text{ sen}(\omega t + \beta)$$

diz-se que entre as grandezas y e y' há uma diferença de fase de $\psi = \alpha - \beta$ rad, que é independente do instante inicial considerado.

Fixa-se o sentido anti-horário como o positivo na medida dos ângulos de fase. Deste modo, quando $\psi > 0$, diz-se que a grandeza y está adiantada de ângulo ψ sobre a y' ; e vice-versa, quando $\psi < 0$, diz-se que a grandeza y está atrasada de ângulo ψ em relação a y' . Finalmente, quando $\psi = 0$, diz-se que as duas grandezas estão em fase.

3.2.2 Representação Fasorial

A execução de operações algébricas com as grandezas senoidais é muito laboriosa. Lembrando a definição de grandezas senoidais, ver-se-á que é possível representá-las por meio de um *vetor girante* tornando as operações sobremodo simplificadas.

Isto é, uma grandeza senoidal está perfeitamente definida por um vetor OA que tem módulo igual ao valor máximo da função, e que gira em torno de seu extremo O com velocidade angular ω no sentido anti-horário e sua posição no instante $t = 0$ é tal a formar, com a reta que define a origem dos tempos, um ângulo igual à fase inicial da grandeza considerada, Figura. 3.2. É claro que a projeção do extremo A do vetor sobre uma reta perpendicular à origem dos tempos, descreverá a função senoidal:

$$y = Y_M \text{ sen}(\omega t + \alpha)$$

Observa-se que o vetor OA está representando uma grandeza escalar; portanto, a fim de se evitar confusão o designamos por vetor girante.

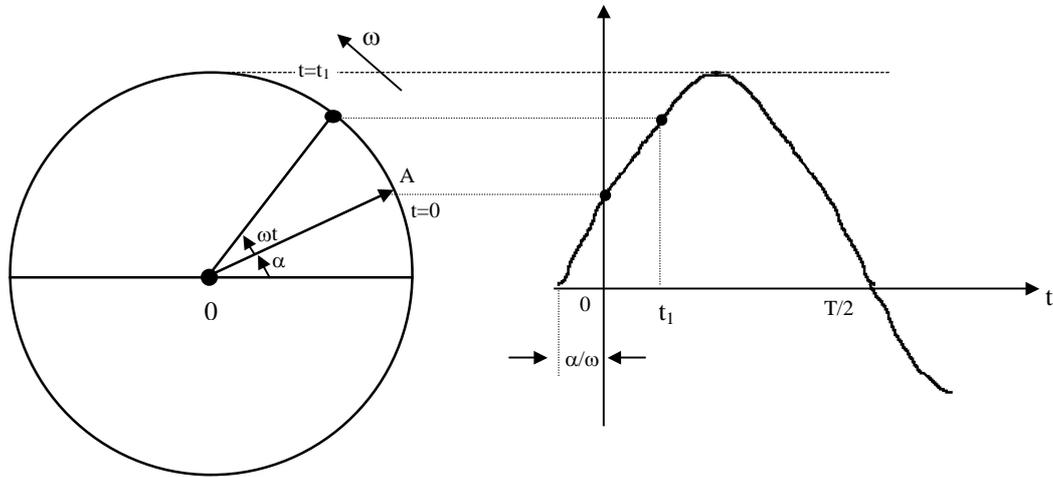


Figura 3.2 - Representação de uma grandeza senoidal

A seguir será analisada a representação por vetores girantes de duas grandezas senoidais, y e y' de mesma frequência, f , ângulos iniciais, α e β , e módulos Y_M e Y'_M . Essas duas grandezas serão representadas por dois vetores girantes de módulos Y_M e Y'_M , defasados de ângulo $\psi = \alpha - \beta$. Observa-se que ambos giram com mesma velocidade angular; portanto, sua posição relativa permanece imutável e a soma dos dois vetores girantes, que também é representada por um vetor girante, é equivalente à soma de Y e Y' .

A representação das grandezas senoidais por vetores girantes simplifica enormemente o procedimento de cálculo, porém, apresenta o inconveniente de se incorrer em erro quando se realizam todas as operações graficamente, devido à imprecisão gráfica. Assim, através da “representação simbólica” ou “fasorial” aplica-se aos vetores girantes um procedimento de cálculo sobremodo interessante que permite efetuar as operações analiticamente eliminando-se a necessidade de se recorrer somente a construções gráficas.

Da teoria dos números complexos, sabe-se que $e^{j\omega t} = \text{sen } \omega t + j \cos \omega t$.

Então uma grandeza senoidal $y = Y_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$ pode ser obtida por $y = \text{Re}[Y_M e^{j\omega t}]$.

O vetor girante, da Figura. 3.2, pode ser representado por:

$$\vec{I}_{(t)} = Y_M (\cos \alpha + j \text{sen } \alpha) e^{j\omega t} \quad (3.4)$$

O termo $Y_M (\cos \alpha + j \text{sen } \alpha)$ representa o vetor girante no instante $t = 0$, e o termo $e^{j\omega t}$ exprime a rotação do vetor de um ângulo ωt .

Define-se o fasor que representa a grandeza senoidal y por:

$$\dot{Y} = a + jb = Y \cos \alpha + jY \sin \alpha = Y \underline{\alpha^\circ} \quad (3.5)$$

em que $Y = Y_M / \sqrt{2}$ representa o valor eficaz da grandeza senoidal.

Exemplo 3.1

Dada a grandeza senoidal $i(t) = 100 \sin(377t + 0,5236)$, pede-se determinar o vetor girante e o fasor que a representa.

Inicialmente determina-se o vetor que representa a grandeza no instante $t = 0$, isto é, um vetor cujo módulo vale 100 é cujo ângulo inicial vale $0,5236 \text{ rad} = 30^\circ$. Suas componentes valem:

$$\begin{aligned} 100 \cos 30^\circ &= 86,60 \\ 100 \sin 30^\circ &= 50,00 \end{aligned}$$

Então o vetor girante é dado por:

$$\bar{I}_{(t)} = (86,60 + j50,00)e^{377t}$$

e o fasor que representa esta grandeza é:

$$\dot{I} = \frac{100}{\sqrt{2}} \cos 30^\circ + j \frac{100}{\sqrt{2}} \sin 30^\circ = \frac{100}{\sqrt{2}} \underline{30^\circ}$$

3.2.3 Números Complexos

A seguir serão lembradas algumas propriedades dos números complexos que serão úteis nas operações com o método simbólico. Sejam dois números complexos A_1 e A_2 , que podem ser expressos na forma retangular por:

$$\bar{A}_1 = a_1 + jb_1 \quad \text{e} \quad \bar{A}_2 = a_2 + jb_2$$

ou, ainda, podem ser expressos na forma polar por:

$$\bar{A}_1 = M_1 \angle F_1 \quad \text{e} \quad \bar{A}_2 = M_2 \angle F_2$$

Lembra-se que para passar da forma retangular para a polar empregam-se as relações:

$$M_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{e} \quad F_1 = \tan^{-1} \frac{b_1}{a_1} \quad \text{ou} \quad a_1 = M_1 \cos F_1 \quad \text{e} \quad b_1 = M_1 \sin F_1$$

As operações básicas entre esses números são:

- Soma ou Subtração: na forma retangular, basta respectivamente somar ou subtrair entre si as partes reais e as imaginárias, isto é:

$$\begin{aligned} \bar{A}_3 &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a_3 + jb_3 \\ \bar{A}_4 &= \bar{A}_1 - \bar{A}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) = a_4 + jb_4 \end{aligned} \quad (3.6)$$

- Multiplicação ou Divisão: na forma polar, basta respectivamente multiplicar ou dividir os módulos e somar ou subtrair os argumentos, isto é:

$$\begin{aligned} \bar{A}_3 &= \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 = M_1 \cdot M_2 \angle F_1 + F_2 = M_3 \angle F_3 \\ \bar{A}_4 &= \frac{\bar{A}_1}{\bar{A}_2} = \frac{M_1}{M_2} \angle F_1 - F_2 = M_4 \angle F_4 \end{aligned} \quad (3.7)$$

É importante ressaltar que $A^* = M \angle -F$ é o complexo conjugado de $\bar{A} = M \angle F$

Exemplo 3.2

Dados os números complexos: $10 \angle 30^\circ$ e $20 \angle -45^\circ$ pede-se sua soma e sua diferença.

Tem-se:

$$\bar{C}_1 = 10 \angle 30^\circ = 10(\cos 30 + j \sin 30) = 8,660 + j5,000$$

$$\bar{C}_2 = 20 \angle -45^\circ = 20(\cos 45 + j \sin 45) = 14,142 - j14,142$$

$$\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = 22,802 - j9,142 = 24,566 \angle -21,85^\circ$$

$$\bar{C}_1 - \bar{C}_2 = 5,482 + j19,142 = 19,912 \angle 105,98^\circ$$

Exemplo 3.3

Dados os números complexos $3 + j4$ e $-7 + j12$, pede-se seu produto e seu quociente.

Tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 &= 3 + 4j = 5 \angle 53,13^\circ \\ \bar{C}_2 &= -7 + 12j = 13,89 \angle 120,26^\circ \\ \bar{C} &= \bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 = 69,45 \angle 173,39^\circ \\ \bar{C}' &= \bar{C}_1 / \bar{C}_2 = 0,36 \angle -67,13^\circ\end{aligned}$$

E na forma retangular, tem-se:

$$\begin{aligned}C_r &= C \cos \alpha = 69,45 \cos 173,39 = -68,988 \\ C_i &= C \sin \alpha = 69,45 \sin 173,39 = 7,994 \\ C'_r &= C' \cos \alpha' = 0,36 \cos 67,13 = 0,140 \\ C'_i &= C' \sin \alpha' = -0,36 \sin 67,13 = -0,332\end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}\bar{C} &= -68,988 + j7,994 \\ \bar{C}' &= 0,140 - j0,332\end{aligned}$$

3.3 POTÊNCIA EM CIRCUITOS COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

Seja o caso de ter-se um gerador C.A., cuja tensão em seus terminais varia com lei senoidal, alimentando carga que absorve corrente variável senoidalmente e que esteja atrasada de ângulo φ em relação à tensão. Isto é, sejam:

$$\begin{aligned}v &= V_M \sin(\omega t + \theta_1) \\ i &= I_M \sin(\omega t + \theta_1 - \varphi)\end{aligned}$$

a tensão e a corrente nos terminais do gerador.

É claro que, em cada instante, a potência fornecida pelo gerador à carga, p , é dada pelo produto dos valores instantâneos da tensão e da corrente, isto é:

$$p = vi = V_M I_M \sin(\omega t + \theta_1) \sin(\omega t + \theta_1 - \varphi) \quad (3.8)$$

Lembrando que:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

resulta

$$p = \frac{V_M I_M}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi + 2\theta_1)] \quad (3.9)$$

ou ainda, sendo $V_M = \sqrt{2}V$ e $I_M = \sqrt{2}I$, resulta:

$$p = VI \cos \varphi + VI \sin (2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2} + 2\theta_1) \quad (3.10)$$

Da Equação. (3.10) verifica-se que a potência instantânea é composta por duas parcelas: uma constante $VI \cos \varphi$ que representa a potência fornecida à carga e outra variável senoidalmente com frequência dupla da tensão aplicada, que representa a energia que ora é fornecida pelo gerador à carga e ora é devolvida da carga ao gerador. Esta última parcela recebe a designação de *potência flutuante*.

O valor médio da potência num ciclo é dado por:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = VI \cos \varphi \quad (3.11)$$

e recebe o nome de “potência ativa” ou mais simplesmente “potência”. Ao co-seno do ângulo de rotação de fase, $\cos \varphi$, dá-se o nome de “fator de potência”.

Observa-se que para fator de potência unitário ($\varphi = 0$), a potência ativa será expressa pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente. Para fator de potência nulo ($\varphi = \pm \pi/2$) a potência ativa será nula.

Definem-se ainda as grandezas potência aparente, potência reativa e potência complexa, que são apresentadas abaixo.

A potência aparente, S , é dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e da corrente, isto é:

$$S = V \cdot I \quad (3.12)$$

sendo medida em Volt \times Ampère (VA).

A potência reativa, Q , é dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente pelo seno do ângulo de rotação de fase entre ambas, isto é:

$$Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (3.13)$$

sendo medida em Volt Ampère reativo (VAr).

Convencionou-se adotar como positiva a potência reativa fornecida a uma carga na qual a corrente está atrasada em relação à tensão. Decorre que uma carga na qual a corrente está adiantada em relação à tensão (φ negativo) a potência reativa será negativa.

Das expressões anteriores, resulta:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

A potência complexa, \bar{S} , é expressa por um número complexo cuja parte real é a potência ativa e cuja parte imaginária é a potência reativa, isto é:

$$\bar{S} = P + jQ = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi = VI \underline{|\varphi} = S \underline{|\varphi} \quad (3.14)$$

Observando-se que a tensão e a corrente consideradas são expressas pelos fasores:

$$\dot{V} = V \underline{|\theta_1} \quad \text{e} \quad \dot{I} = I \underline{|\theta_1 - \varphi}$$

observa-se que a potência complexa é dada pelo produto:

$$\dot{V} \dot{I}^*$$

em que \dot{I}^* é o complexo conjugado da corrente, isto é:

$$\bar{S} = \dot{V} \dot{I}^* = V \underline{|\theta_1} \quad I \underline{|\theta_1 + \varphi} = VI \underline{|\varphi} \quad (3.15)$$

3.4 CIRCUITOS ELEMENTARES COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

3.4.1 Resistência Pura

Aplicando-se a uma resistência constante, R , uma tensão alternada senoidal dada por:

$$v(t) = V_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

pela lei de Ohm em cada instante ter-se-á:

$$v(t) = R i(t)$$

ou seja:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_M}{R} \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

Conclui-se que: a corrente que percorre a resistência está em fase com a tensão de alimentação e seu valor máximo é dado pela relação entre o valor máximo da tensão e o da resistência.

Na notação simbólica tem-se, empregando valores eficazes, e supondo a tensão com fase nula: $\dot{V} = V|0^\circ$ resulta:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{V}{R} |0^\circ = I|0^\circ$$

Na Figura. 3.3 apresenta-se um circuito resistivo e o correspondente diagrama de fasores.

A potência instantânea absorvida pela resistência é dada por:

$$p(t) = i(t)^2 R = v(t) i(t) = \frac{v(t)^2}{R}$$

A potência ativa ou real é dada por:

$$P = VI = RI^2 = V^2 / R$$

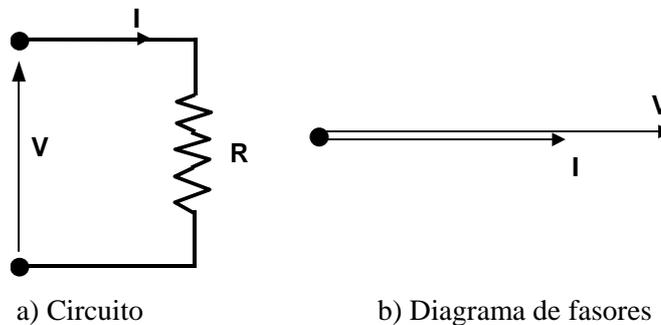


Figura 3.3 - Circuito resistivo e seu diagrama fasorial

O fator de potência, $\cos \varphi$, é unitário, a potência reativa, Q é nula e a potência aparente coincide com a ativa.

Verifica-se, pois, que todas as relações entre valores eficazes coincidem com os valores que seriam obtidos alimentando-se a resistência R com tensão contínua de valor V . A expressão da lei de Joule permite, portanto, que se interprete o valor eficaz de uma corrente como sendo:

“O valor eficaz de uma corrente alternada é igual ao valor de uma corrente contínua que atravessando a mesma resistência produz igual quantidade de calor no mesmo intervalo de tempo”.

Salienta-se que esta conclusão obtida para grandezas senoidais é válida para grandezas alternativas quaisquer.

Exemplo 3.4

Aplica-se a uma resistência de 20Ω tensão senoidal de valor eficaz 100V e frequência de 60 Hz. Pede-se:

- O valor eficaz da intensidade de corrente na resistência.
- A potência dissipada na resistência.
- O valor instantâneo da corrente e da tensão.

Adotando-se tensão com fase inicial nula resulta:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V|0^\circ = V + 0j = 100|0^\circ = 100 + 0j \\ \dot{I} &= \frac{\dot{V}}{R} = \frac{100}{50} = 5 + 0j\end{aligned}$$

donde:

$$I = |\dot{I}| = 5A$$

A potência dissipada na resistência vale

$$P = R I^2 = 20 \times 5^2 = 500 \text{ W}.$$

O valor instantâneo da corrente é dado por:

$$i = I_M \text{ sen } \omega t$$

em que:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = 2\pi \times 60 \cong 377 \text{ rad/seg} \\ V_M &= \sqrt{2} V = \sqrt{2} \times 100 = 141,42 \text{ V} \\ I_M &= \sqrt{2} I = \sqrt{2} \times 5 = 7,071 \text{ A}\end{aligned}$$

logo:

$$i = 7,071 \text{ sen } 377t \quad \text{e} \quad v = 141,42 \text{ sen } 377t$$

3.4.2 Indutância Pura

Aplicando-se uma tensão senoidal de frequência f e de valor eficaz V a uma bobina de indutância L e resistência ôhmica nula ter-se-á a circulação, pela indutância, de uma corrente de valor instantâneo $i(t)$ que irá criar uma f.e.m. dada por:

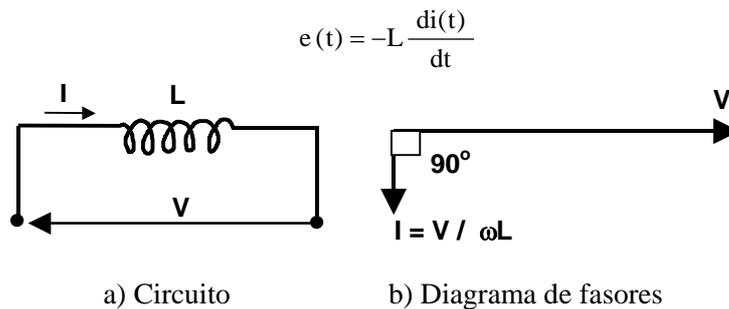


Figura 3.4 - Circuito indutivo com excitação senoidal

Por outro lado, deverá ser:

$$v(t) + e(t) = 0$$

isto é:

$$v(t) = -e(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Sendo:

$$v(t) = V_M \text{ sen } \omega t ,$$

resulta, imediatamente:

$$i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \text{ sen } (\omega t - \pi/2) \quad (3.16)$$

Esta equação mostra que a corrente numa indutância está atrasada de $\pi/2$ radianos (ou 90°) em relação à tensão aplicada e seu valor máximo é obtido dividindo-se o valor máximo da tensão por ωL que é designado por “reatância indutiva”, sendo representada por X_L e tem a dimensão de uma resistência.

No método simbólico, leva-se em conta a rotação de fase da corrente representando-se a indutância por uma “impedância” que é dada por um número complexo no qual a parte imaginária é a reatância da bobina. Isto é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{jX_L} = -j \frac{\dot{V}}{X_L}$$

sendo:

$$\dot{V} = V \underline{|0^\circ}$$

resulta:

$$\dot{I} = \frac{V}{X_L} \underline{|-\pi/2} \quad (3.17)$$

Assim, numa indutância, a tensão e a corrente estão em quadratura e o fator de potência correspondente é dado por:

$$\cos \varphi = \cos \pi/2 = 0$$

A potência ativa é nula e a reativa que coincide com a aparente, é positiva e vale:

$$Q = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} = S$$

Nota-se que a indutância, quando ligada a uma fonte de corrente alternada, é percorrida por uma corrente sem que haja uma dissipação de energia.

Exemplo 3.5

Uma indutância de 0,08 H é alimentada com tensão senoidal de valor eficaz 240 V e 60 Hz. Pedem-se:

- A intensidade de corrente na indutância.
- A potência ativa, aparente e reativa fornecidas à indutância.
- O valor instantâneo da corrente e tensão.

Solução:

- a) Determinação da corrente

Tem-se:

$$\dot{V} = 240 + j0 \quad \text{V} \quad \text{e} \quad X_L = 2\pi f L = 30,16 \quad \Omega$$

logo:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{jX_L} = \frac{240 + j0}{j30,16} = -j7,96 = 7,96 \underline{|-\pi/2} \quad \text{A}$$

$$I = |\dot{I}| = 7,96 \text{A}$$

- b) Determinação da potência

Tem-se:

$$P = VI \cos \varphi = 240 \times 7,96 \times 0 = 0 \text{ W}$$

$$S = VI = 240 \times 7,96 = 1910,4 \text{ VA}$$

$$Q = VI \sin \varphi = 240 \times 7,96 \times 1 = 1910,4 \text{ VAR}$$

c) Valores instantâneos

Tem-se:

$$V_M = \sqrt{2} V = \sqrt{2} \times 240 = 339,41 \text{ V}$$

$$I_M = \sqrt{2} I = \sqrt{2} \times 7,96 = 11,26 \text{ A}$$

logo:

$$v = 339,4 \sin 337t \quad \text{V}$$

$$i = 11,26 \sin \left(337t - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{A}$$

3.4.3 Capacitância Pura

Um capacitor, de capacidade C , alimentado por uma tensão senoidal, de valor eficaz V e frequência f , terá, em regime, carga q , dada por:

$$q(t) = Cv(t) = CV_M \sin \omega t$$

Portanto, será percorrido por corrente (por indução eletrostática) dada por:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt} = \omega C V_M \sin (\omega t + \pi / 2) \quad (3.18)$$

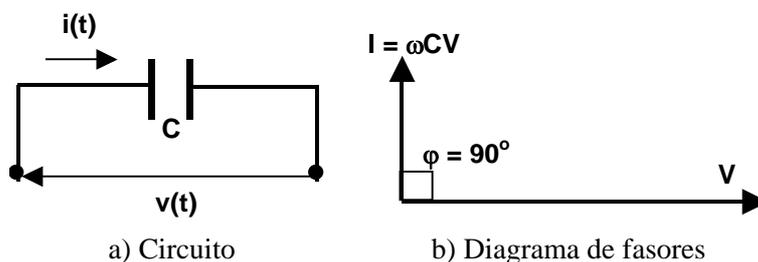


Figura 3.5 - Circuito capacitivo com excitação senoidal

Verifica-se que a corrente num capacitor está adiantada de $\pi/2$ radianos em relação à tensão e seu valor eficaz é obtido multiplicando-se o valor correspondente da tensão por ωC . Analogamente, a quanto feito com uma indutância, o termo:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

é chamado de “reatância” do capacitor ou de reatância capacitiva. A unidade da reatância capacitiva também é “Ohm”.

Na notação simbólica, a “impedância” de um capacitor será representada por um número complexo no qual a parte real será nula e a parte imaginária será $-j X_C$. Isto é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{-jX_C} = j \frac{\dot{V}}{X_C}$$

sendo:

$$\dot{V} = V \underline{0^\circ}$$

resulta:

$$\dot{I} = \frac{V}{X_C} \underline{\pi/2}$$

Assim, o fator de potência de um capacitor é dado por:

$$\cos \varphi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

A potência ativa absorvida é nula enquanto que a aparente e a reativa coincidem em módulo e valem:

$$S = VI$$

$$Q = VI \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -VI = -\frac{I^2}{\omega C} = -\omega C V^2$$

Exemplo 3.6

Determinar a intensidade de corrente num circuito formado por um capacitor de $10\mu\text{F}$ ligado a uma fonte de 120 V e 60 Hz.

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 10 \times 10^{-6}} = 265,26 \ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{120}{-jX_C} = \frac{120}{265,26} j = j0,452 \ \text{A}$$

3.4.4 Circuito com Elementos em Série

Dado o circuito da Figura. 3.6, constituído pela associação em série de uma indutância, uma capacidade e uma resistência, alimentado por uma tensão senoidal de valor eficaz V e frequência f deseja-se calcular a corrente e as quedas de tensão nos três elementos.

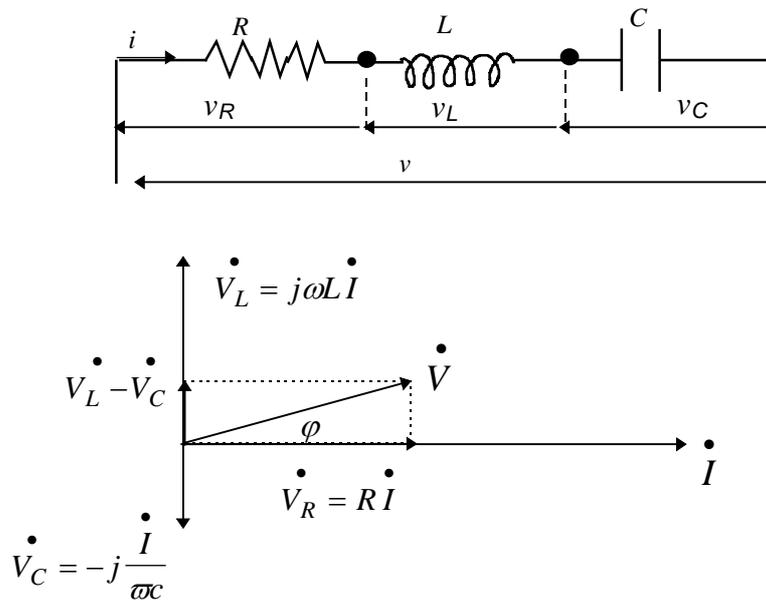


Figura 3.6 - Associação RLC série

Estando os três elementos em série, a corrente que circula, evidentemente, será a mesma para os três, portanto, pode-se adotar:

$$\dot{I} = I \underline{1} = I(1 + 0j)$$

A queda de tensão em cada um dos elementos será dada por:

$$\dot{V}_R = \dot{I}R = IR \underline{0}$$

$$\dot{V}_L = \dot{I}jX_L = IX_L \underline{\pi/2}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I}(-jX_C) = IX_C \underline{-\pi/2}$$

É claro que, em cada instante, a tensão aplicada deverá igualar a soma das quedas de tensão. Portanto, essa relação também deve valer para os fasores correspondentes:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = \dot{I} [R + j(X_L - X_C)]$$

Define-se o “operador impedância” ao número complexo que, multiplicado pelo fasor da corrente no ramo do circuito, fornece o fasor da tensão aplicada ao mesmo. A impedância do circuito, \bar{Z} , ora analisado, é:

$$\bar{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C) \quad (3.19)$$

Em particular, para os elementos individuais, isto é, uma resistência, uma indutância e uma capacidade, a impedância é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_R &= R + 0j = R \underline{|0} \\ \bar{Z}_L &= 0 + jX_L = X_L \underline{|\pi/2} \\ \bar{Z}_C &= 0 - jX_C = X_C \underline{|-\pi/2} \end{aligned}$$

Passando-se a impedância \bar{Z} para a forma trigonométrica (módulo Z e fase θ), ter-se-á:

$$\bar{Z} = Z(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta) = Z \underline{|\theta} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V \underline{|0}}{I \underline{|-\varphi}} = VI \underline{|\varphi} \quad (3.20)$$

Observa-se que o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente, φ , coincide com o argumento da impedância, e o fator de potência pode ser avaliado por:

$$\cos \varphi = \cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z} \quad (3.21)$$

Para a construção do diagrama de fasores, Figura.3.6, supõe-se conhecida a intensidade de corrente; portanto, a queda de tensão na resistência será representada por um fasor em fase com a corrente e de módulo igual a IR . Na indutância, o será por um fasor em quadratura e adiantado sobre a corrente e de módulo $IX_L = 2\pi fLI$. Finalmente, no capacitor, a queda de tensão será dada por um fasor em quadratura e atrasado sobre a corrente e de módulo $IX_C = I/(2\pi fC)$. A tensão aplicada será obtida somando-se vetorialmente os três fasores. Como \dot{V}_L e \dot{V}_C estão em posição de fase, sua soma equivalerá à soma algébrica de seus módulos, isto é:

$$\dot{V}_L - \dot{V}_C = \dot{I}(X_L - X_C)j$$

Para a determinação gráfica de todas as incógnitas, observa-se que os fasores \dot{V} , \dot{V}_R e $(\dot{V}_L - \dot{V}_C)$ formam um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é representada pelo fasor \dot{V} .

Quanto à potência ativa, tem-se:

$$P = VI \cos \varphi = (IZ) \times I \times \frac{R}{Z} = I^2 R$$

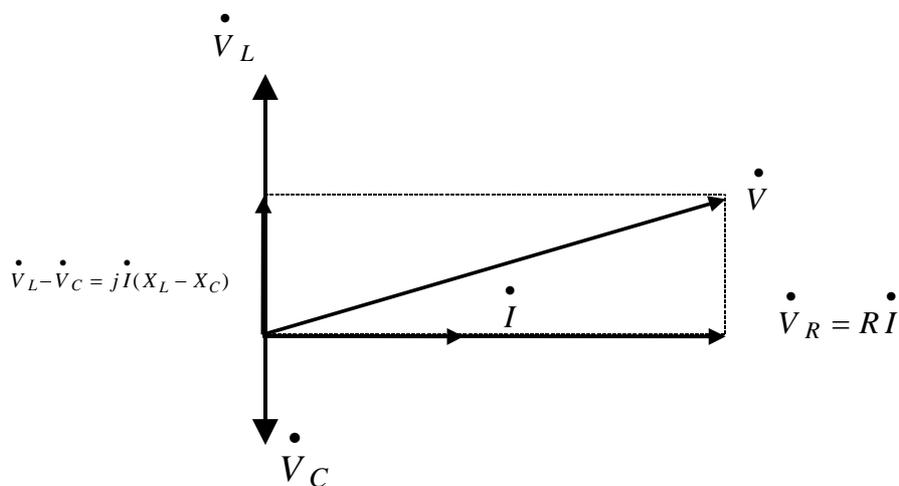


Figura 3.7 - Diagrama de fasores para circuito R-L-C série

Exemplo 3.7

Resolver o circuito da Figura. 3.8, sendo dados:

$$V = 220V \text{ (eficaz)}, f = 60 \text{ Hz}, R_1 = 4\Omega, R_2 = 8\Omega, L = 13,26\text{mH} \text{ e } C = 294,7 \mu\text{F}$$

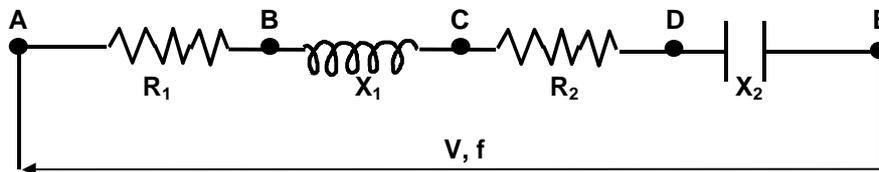


Figura 3.8 - Circuito para o exemplo 3.7

a) Cálculo da impedância

Sendo $\bar{Z} = \bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{CD} + \bar{Z}_{DE}$, resulta:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{AB} &= 4 + 0j \quad \Omega & \bar{Z}_{CD} &= 8 + 0j \quad \Omega \\ \bar{Z}_{BC} &= 2\pi \times 60 \times 0,013226 = 5j \quad \Omega \\ \bar{Z}_{DE} &= -j \frac{1}{2\pi \times 294,7 \times 10^{-2}} = -9j \quad \Omega \\ \bar{Z} &= 12 - j4 \quad \Omega\end{aligned}$$

b) Cálculo da corrente

Adotando-se $\dot{V} = 220 + 0j$, resulta:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\bar{Z}} = \frac{220}{12 - j4} = \frac{220}{12,65 \angle -18,43^\circ} = 17,39 \angle 18,43^\circ \text{ A} = 16,5 + j5,5 \text{ A}$$

c) Cálculo das tensões

$$\begin{aligned}\dot{V}_{AB} &= \bar{Z}_{AB} \dot{I} = 4(16,5 + j5,5) = 66 + j22 = 69,57 \angle 18,43^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{BC} &= \bar{Z}_{BC} \dot{I} = 5j(16,5 + j5,5) = -27,5 + 82,5j = 86,96 \angle 108,43^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{CD} &= \bar{Z}_{CD} \dot{I} = 8(16,5 + j5,5) = 132 + j44 = 139,14 \angle 18,43^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{DE} &= \bar{Z}_{DE} \dot{I} = -9j(16,5 + j5,5) = 49,5 - 148,5j = 156,53 \angle -71,56^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Verificação:

$$\dot{V}_{AE} = \dot{V}_{AB} + \dot{V}_{BC} + \dot{V}_{CD} + \dot{V}_{DE} = 220 + j0 \text{ V}$$
