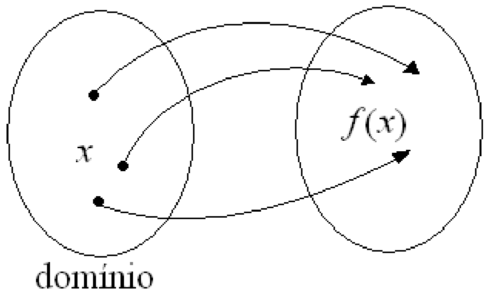
Monitoria de reforço para Matemática Elementar e Cálculo I - AULA #1

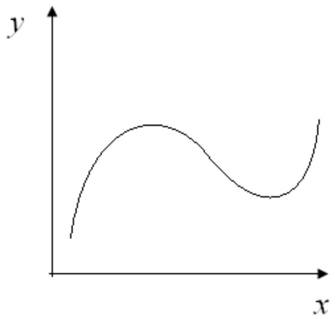
Função

Dados dois conjuntos não vazios *A* e *B*, uma função de *A* em *B* é uma relação que a cada elemento *x* de *A* faz corresponder um único elemento em *y* de *B*.

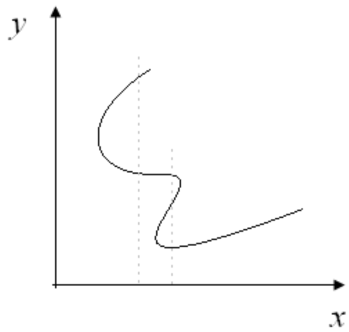


$x \Rightarrow domínio \qquad f(x) \Rightarrow imagem$

Graficamente:



é função



não é função

Determine o domínio das funções abaixo:

$f(x) = \dfrac{x}{x-1} \qquad y = \dfrac{2}{x^2+x} \qquad f(x) = \sqrt{x-3}$

1)

$$\frac{x}{x^2-x-6} + \frac{1}{x+4}$$

Para casa:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x-1}}$$

Algumas funções mais conhecidas

Função do primeiro grau:

$$y = ax + b \qquad a \neq 0$$

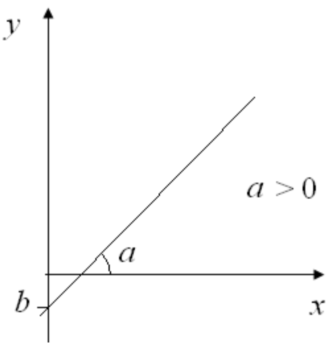
Qual o domínio? ($\mathbb{R}$)

Qual a imagem? ($\mathbb{R}$)

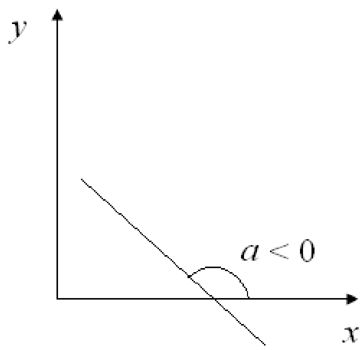
a = coeficiente linear, b = coeficiente angular

$a > 0$ função crescente

$b < 0$ função crescente



$$a = \frac{y}{x}$$



Estudo do Sinal:

$$\frac{2x-1}{x-1} \leq 0 \qquad 2x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{2}$$

$$x + 1 = 0 \qquad x = -1$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - 1/2 + + + + + + + + + + + + +

\- 1 + + + + + + + +

\+ + + + + + + + + + + + 1/2 - - - - - 1 + + + + + + + +

[1/2,1[. Atentar para o sinal da expressão.

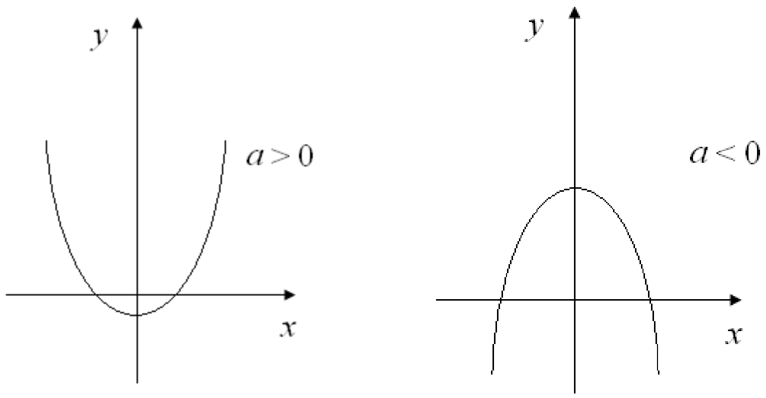
Resolva:

$$(2x-1)(x+4) > 0$$

Resp: $\{\, x \in \mathbb{R} / \; x < -4 \quad ou \quad x > 1/2 \,\}$

<u>Função do Segundo Grau</u>

$$y = ax^2 + bx + c$$



O vértice da parábola:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \qquad x_V = -\frac{b}{2a} \qquad \text{Como demonstrar?}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b = 0 \qquad x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = a.\frac{b^2}{4a^2} + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a},$$

logo , a coordenada y do vértice é:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Problema

Uma bola é lançada verticalmente para cima. Suponha a sua altura h em metros relativamente ao solo, *t* segundos após o lançamento seja:

$$h = -5t^2 + 20t + 30$$

Qual a curva?

Faça o gráfico:

$- 5t^2 + 20t + 30 = 0$

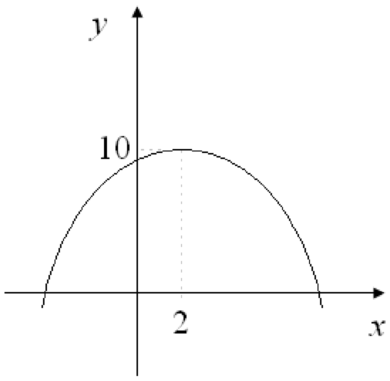
$-t^2 + 4t + 6 = 0$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Delta = (4)^2 - 4(-1)(6) = 40$

$t = \dfrac{-4 \ \pm 2\sqrt{10}}{-2}$

$t = 2 - \sqrt{10}$ $\quad\quad\quad\quad$ $t = 2 + \sqrt{10}$

Qual o vértice?

$x = \dfrac{-4}{-2} = 2$ $\quad\quad\quad\quad$ $x = \dfrac{-40}{-4} = 10$



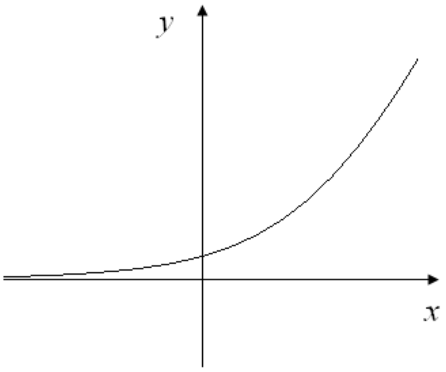
Usando cálculo:

$-10t + 20 = 0$ $\quad\quad\quad\quad$ $t = 2s$

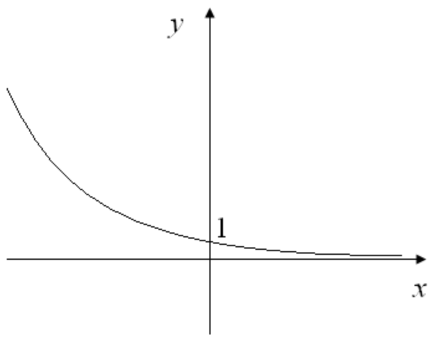
Função Exponencial

Na base a:

$f(x) = a^x$



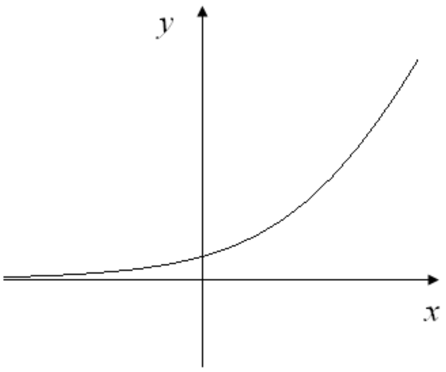
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Observe que elas são sempre crescentes.

$f(x) = e^x$

$e \cong 2{,}7$

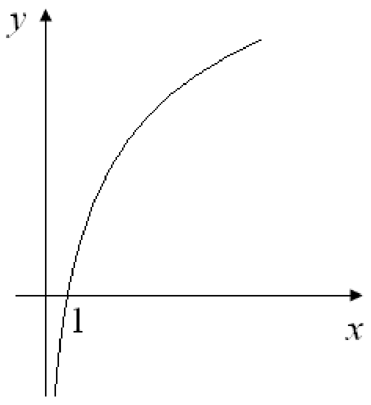


Função Logarítmica

$y = \log x$

Na base 2:

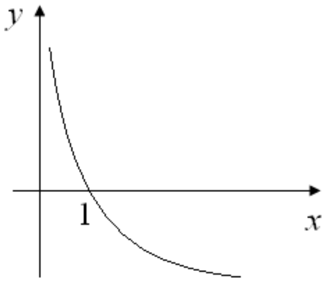
$y = \log_2 x$



Observemos que:

1. $D = \mathbb{R}_+^*$
2. $Im = \mathbb{R}$
3. A função é sempre crescente:

$y = \log_{1/2} x$



$x = \log_a b \quad \Rightarrow \quad a^x = b$

$b > 0$

$\log_a 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a^0 = 1$

$a \neq 0$

$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a bc$

$\log_a(b.c) = x \quad \Rightarrow \quad a^x = b.c$

$y = \log_a b$

$z = \log_a c$

$a^x = a^y a^z \quad\quad x = y + z$

$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a bc$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a bc \quad \Rightarrow$ tentem fazer!

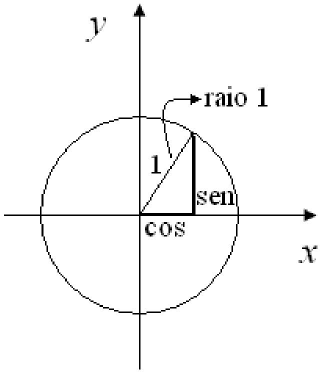
$\log_a b^m$ $\quad$ $a^y = b^m$

$z = \log_a b$ $\quad$ $a^z = b$ $\quad$ tentem fazer!

$a^y = (a^z)^m$ $\quad$ $y = m.z$

Funções Trigonométricas

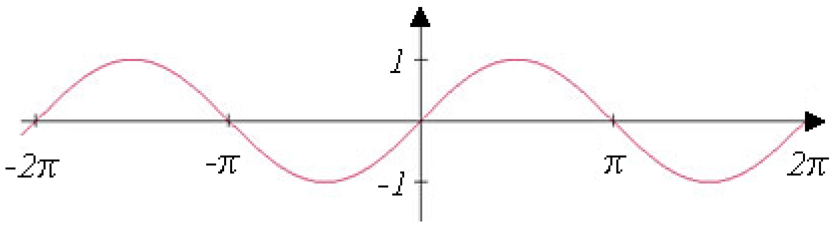
Círculo trigonométrico:



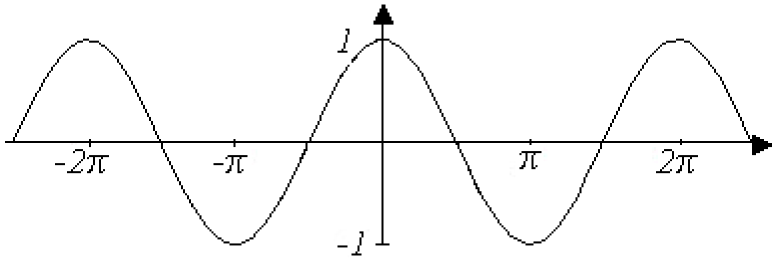
$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Triângulo retângulo

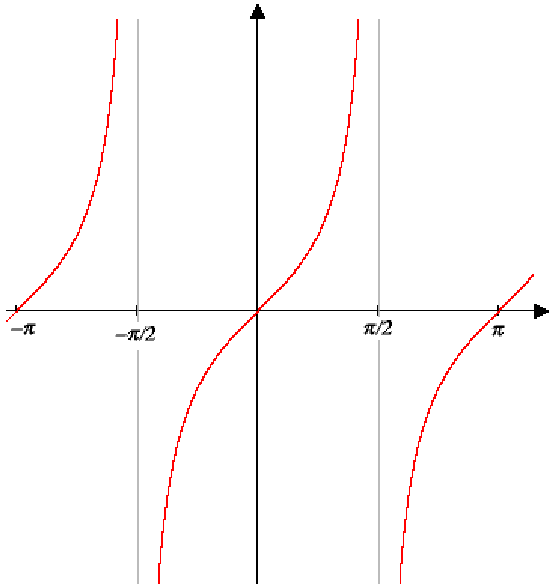
$y = senx$



$y = cosx$



$y = tg\ x$ → Qual o domínio (observar o círculo trigonométrico)?



$tg^2x + 1 = sec^2x$

$cotg^2x + 1 = cossec^2x$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(a+b)\\ \cos(a-b)\\ \text{sen}(a+b)\\ \text{sen}(a-b)\end{array}\right\}\quad \text{Deduzir } \cos(2a) \text{ e sen}(2\text{a})$$

Transformar soma em produto:

$$sen\ p + sen\ q = 2\ sen\ \left(\frac{p+q}{2}\right) cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Limites

Antes de falarmos de limites é conveniente olhar para a simplificação.

Simplifique:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

$$\frac{\frac{1}{X^2}-\frac{1}{P^2}}{x-p} = \frac{\frac{p^2-x^2}{p^2x^2}}{(x-p)} = \frac{p^2-x^2}{x^2p^2}.\frac{1}{x-p} =$$
$$= \frac{(p-x)(x+p)}{x^2p^2(x-p)} = \frac{-(x-p)(x+p)}{x^2p^2(x-p)} = \frac{-(x+p)}{x^2p^2}$$

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

Exercício

Simplifique:

$$\frac{f(x+h-f(x)}{h}$$

Para $f(x) = 2x+1$:

$$\frac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h} = \frac{2x+2h+1-2x-1}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

Fazer para $g(x) = x^2 + 2x$

Mais exercícios: 2.1 do Guidorizzi volume I.