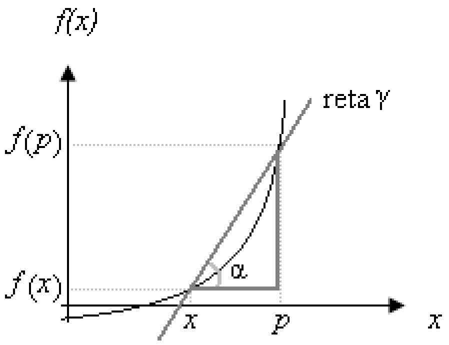
Monitoria de reforço para Matemática Elementar e Cálculo I - <u>AULA #4</u>

<u>Derivadas</u>

Sejam *f* uma função e *p* um ponto do domínio. Consideremos o limite:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

O que isso representa geometricamente?



$$tg(\alpha) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \text{inclinação da reta } \gamma$$

Quando $x \to p$, γ se torna o coeficiente angular da reta tangente e $f'(x) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ se torna o coeficiente angular da reta tangente.

Escreve-se:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

Para $f(x) = x^2$:

$$\lim_{x \to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{(x-p)(x+p)}{x - p} = 2x$$

Para $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\lim_{x \to p} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{p}}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{p}}{(\sqrt{x} - \sqrt{p})(\sqrt{x} + \sqrt{p})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Em geral:

$$f(x) = x^n \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Derivada de e^x:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Pois:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Mudança de variáveis:

$$y = e^h - 1 \qquad \begin{cases} e^h = y+1 \\ h = \ln(y+1) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} h \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\ln(y+1)^{1/y}}$$

Outra mudança de variáveis:

$$\frac{1}{y} = k \qquad \begin{cases} y \to 0 \\ k \to +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{k\to +\infty} \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \lim_{k\to +\infty} \frac{1}{\ln e} = 1$$

Este é o *segundo limite fundamental*. Voltando a derivada:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Derivada de e $\ln x$:

$$f(x) = \ln x$$

Então:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

Mudança de variáveis:

$$u = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{1/ux} = \lim_{u\to 0}\left[\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{1/u} = \frac{1}{x}$$

<u>Derivada de Funções trigonométricas</u>

Seja:

$$f(x) = sen(x)$$

Então:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

$$\begin{array}{rl} & sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a) \\ - & sen(a-b) = sen(a)\cos(b) - sen(b)\cos(a) \\ \hline & 2sen(b)\cos(a) \end{array}$$

$$a = \frac{2x+h}{2} \quad , \quad b = \frac{h}{2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2sen\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{1} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

Para casa:

$$f(x) = \cos(x)$$

Regra de Derivação

- ✓ $f(x) = 4x^3 + x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x^2 + 2x$

- ✓ $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x(2x+3)}{(x^2+1)^2}$

  $= \dfrac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^2}$

- ✓ $f(x) = (3x^2+1)e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6xe^x + (3x^2+1)e^x = e^x(3x^2 + 6x + 1)$

- ✓ $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{\cos(x)(x+1) - sen(x)}{(x^2+1)^2}$

- ✓ $f(x) = x^3 + \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$

- ✓ $f(x) = x^2 e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$

- ✓ $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x) - (-e^x)(1+e^x)}{(1-e^x)^2} = \dfrac{e^x - e^{2x} - (-e^x - e^{2x})}{(1-e^x)^2}$

  $= \dfrac{e^x - e^{2x} + e^x + e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

- ✓ $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}x + \ln(x)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

- ✓ $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

- ✓ $f(x) = xe^{x}\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (e^{x} + xe^{x})\cos(x) + xe^{x}(-sen(x))$

$= e^{x} + xe^{x}\cos(x) - xe^{x}sen(x) = e^{x}(1 + x\cos(x) - xsen(x))$