Monitoria de reforço para Matemática Elementar e Cálculo I - AULA #5

Integrais

Definição:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ ,$$

está associada a área sob a curva.

Propriedades da Integral

a) $f+g$ é integrável em $[a+b]$ e $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

b) αf é integrável em $[a+b]$ e $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Exemplos:

- ✓ $\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$;
- ✓ $\int_0^2 \left(x^3+3x-1\right)dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x\right|_0^2 = \frac{16}{4} + \frac{3.4}{2} - 2 - 0 = 4+6-2 = 8$;
- ✓ $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$;
- ✓ $\int sen(2x)dx = -\frac{\cos(2x)}{2} + C$;
- ✓ $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$;
- ✓ $\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$;
- ✓ $\int \frac{1+x}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int \left(x^{-3} + x^{-2}\right)dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + C$;
- ✓ $\int e^{3x} dx$, mudança de variável:

  $u = 3x$, logo $du = 3dx$.

Assim $\int e^u \frac{du}{3} = \frac{e^u}{3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$;

- ✓ $\int \frac{x}{x^2+1} dx =$, mudança de variável:

$u = x^2 + 1$, logo $du = 2xdx$, ou $\frac{du}{2} = xdx$.

Assim $\int \frac{du}{2u} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{\ln|u|}{2} + C = -\frac{\ln|x^2+1|}{2} + C$;

- ✓ $\int x\sqrt{x^2+1}dx$, mudança de variável:

$u = x^2 + 1$, logo $du = 2xdx$, ou $\frac{du}{2} = xdx$.

Assim: $\int u^{1/2} \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int u^{1/2} du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C$;

- ✓ $\int sen(x)\cos^2(x)dx$, mudança de variável:

$u = \cos(x)$, logo $du = -sen(x)dx$.

Assim $\int -du.u^2 = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C$;

- ✓ $\int sen(x)\left(1-\cos^2(x)\right)dx = \int sen(x)dx - \int sen(x)\cos^2(x)dx = \cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + K;$

- ✓ $\int \cos^3(x)dx =$

$= \int \cos(x)\cos^2(x)dx = \int \cos(x)\left(1-sen^2(x)\right)dx = \int \cos(x)dx - \int \cos(x)sen^2(x)dx$.

A primeira integral é $\int \cos(x)dx = -sen(x) + A$, mas quanto a segunda?

Fazemos uma mudança de variável: $u = sen(x)$, então $du = \cos(x)dx$. Assim,

$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + B = \frac{sen^3(x)}{3} + B$, logo, o resultado final é:

$$\int \cos^3(x)dx = -sen(x) + \frac{sen^3(x)}{3} + C \text{, onde } C = A + B.$$

- ✓ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, fazemos uma mudança de variável: $x = sen(\theta)$, então $dx = \cos(\theta)$.

Lembrando que $sen^2(\theta) + \cos^2(x) = 1$, ou, $\cos^2(x) = 1 - sen^2(\theta)$, reescrevemos a integral:

$$\int \frac{\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{1-sen^2(\theta)}} = \int \frac{\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} = \int d\theta = \theta = arcsen(x) + C;$$

✓ $\int \frac{dx}{1+x^2}$, fazemos uma mudança de variável: $x = tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$, então

$dx = \frac{\cos(\theta)\cos(\theta) - (-sen(\theta))sen(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \sec^2(\theta)d\theta$. Assim:

$$\int \frac{\sec^2(\theta)d\theta}{1+tg^2(\theta)} = \int d\theta = \theta = arctg(\theta) + C \, .$$